数理論理学 (内田老鶴圃) 5 章 否定の注意について

4 章、とくに 5 章に否定命題および否定概念についての注意を書いたが、アマゾンのカスタマーレビューに 2 人の人が同様の変なコメントをつけられているようである。また、他の人にも真意が伝わっていない可能性もあるので、数理論理学一般に対する注意を含め、ここに書いておこうと思う。

まず、認識すべきことは、否定命題、否定概念という場合、論理的に同値なものを同一視したら、古典論理を前提にすれば、すべての概念は否定概念となってしまうということである。つまり、 A を二重否定 $\neg\neg A$ と同一視すれば、A は $\neg A$ の否定である。とくに直観主義論理を考えなくても、ある概念から、その否定概念が定義され、そしてその後にその二重否定が定義されるというのは当然のことである。ここでの否定命題、否定概念というのは、そのような同一視のもとで考えるものではない。論理的に同値な命題と同一視すれば、すべて命題は $\vee$ で結ばれた命題であるともいえるし、 $\wedge$ で結ばれた命題であるともいえ、意味をなさない。否定命題 $\neg A$ の証明の仕方は、A を仮定して矛盾を証明する以外にないというのは、それが自然な方法であるということである。たとえば、公理の中に $\neg A$ があれば、それからただちに導かれるので推論はいらない。これはバカバカしいことだが、証明しないで使うことを増やせば、短く、簡単な証明が得られるということの顕著な例である。また、以下に形式化された論理体系に関して書いてある話だが、否定導入の推論がない体系もあるのだから、そこで考えるのだといえば当然上に書いた推論を使わない、使えないのだ。次のことを考えていただければ、私の書いている意味がわかる人も多いと思う。

対偶法といわれるものがある。普通は $\neg B \to \neg A$ から $A \to B$ を導く推論であり、直観主義論理に付け加えると、古典論理となることが知られている。一方 $A \to B$ から $\neg B \to \neg A$ を導くのは直観主義論理でも認められる推論である。しかし、どちらも $\to$ と $\neg$ いう論理結合子を使ったものに関するものであるから、何らかの方法で、A, B がそのまま現れる形に還元して納得することになろうと思う。後者の場合、$\neg B$ の仮定のもとで、さらに A を仮定すると $A \to B$ から B が結論さ

れ、矛盾が起きる。そこで、$\neg B$ の仮定から $\neg A$ が導かれるのだと思うというのが自然な考えかただろうと思う。前者は原理的にももっと難しい、というのも直観主義論理では認められない推論が関わっているからだ。A を仮定し、$\neg B$ を仮定する。すると $A \to B$ から B が結論されるが、これは $\neg B$ と矛盾する。だから $\neg B$ が否定される。さてここまでは、前と同じ推論だが、前と同じだと A から $\neg\neg B$ が導かれるということになるが、その代わりに A から B が導かれるという筋をとる。つまり、 $\neg B$ の否定から B が導かれると思うことになる。ここが直観主義論理では認められない推論が関わっているところだ。私の書いたことは、どこかで、否定という概念を外さないかぎり証明できないということと、その自然な考えかたは否定の導入の推論であるということである。

論理には、形式化されているものと、そうでないものがある。5 章は形式化された証明のひとつである LK というシステムを説明している。歴史的には、Hilbert 流と呼ばれるフレーゲによって始められた形式がある (最近フレーゲが見直され、Frege-Hilbert 流と呼んでいる人もいる)。これは、公理から始まり、量化子を $\forall$ だけにしておけば、量化子に関する Generalization の他は Modus Penons、つまり、A と $A \to B$ から B を導く推論だけで成り立つ。否定命題あるいは否定概念についての注意は、もちろん形式化された論理に関する注意ではなく我々が、何かを証明しようとする場合の注意である。たとえば、上記の Hilbert 流では、A を仮定し、矛盾が起こったとき $\neg A$ を結論する推論はないのだから、$\neg A$ が証明されるときの証明も公理から始め Generalization と Modus Penons という推論の繰り返しで形成される。また、公理の中にその否定命題があれば、何の推論もしないでその否定命題の証明が得られる。そのように思えば、そこの注意は何を意味しているかわからなくなる。形式化されていない論理というのは議論の対象として漠然としているため、形式化されている他の論理体系に関する説明を交えて、否定の注意の補足をする。

述語論理の形式化に関しては、いくらでも考えられるし、Scheffer stroke という命題演算子を使えば、$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$ を使わないですむことも知られている。しかし、論理の形式化ということから考えると、Gentzen が定義した NK と LK (直観主義論理のバージョンは NJ と LJ) がよく知られているだけでなく自然で合理的なものであろう。NK はより自然で LK はより合理的といった方がよいかもしれない。NK の

N は自然という意味で、LK の L は論理というだけだが、LK の合理性はその後の証明論の発展からもわかることである。これらのシステムでは論理記号各々についての推論がある。色々な概念が、簡単な概念から組み合わされて形成されること、そして、その組み合わせが、ひとつひとつの論理記号の組み合わせで構成されることから、その各々に対する推論規則があるというのは自然なことである。Hilbert 流というのは、論理の形式化としては必ずしも自然ではない。Hilbert 流の命題論理の公理から $A \to A$ を導くのは、なかなか難しいことが知られている。それは、公理の数を最小にすべきであるという要求からの帰結でもあるが、どの程度の範囲を公理とするかというとまた問題が生じる。Tautology は全て公理とするというのは、形式的述語論理として、よくあるスタンスではあるが、論理の形式化として自然なものではないことは明らかである。さて、この NK および NJ には「否定の導入」という推論規則があり、上記の A を仮定し、矛盾が起こったとき $\neg A$ を結論する推論を明示的に形式化したものがある。Gentzen は、他の論理結合子に対する推論と同様、これが否定に関する自然な推論であると思い定義したのだろうと思う。LK と LJ では Cut 除去定理が成り立ち、ある命題を証明するのに、その概念より複雑な概念を使わない、いわば無駄のない証明がある。とくに、直観主義論理の LJ での否定命題を結論とするこのような証明では、公理に、その否定命題そのものが現れない限り、明示的に矛盾が現れ、その後、結論の否定命題が現れる。このことは、形式論理での話であり、5 章の注意はその事実をそのままいっているわけではない。しかし、概念の構成や、自然な考えかたという意味では関係がある。

上に書いた $A \to B$ から $\neg B \to \neg A$ が導けることの納得の仕方だが真理表を書いて処理するという方法もある。しかし、これは論理的にものを考えるという姿勢からいうと、逃げているという感を否めない。真理表を書いて済ませる方法は直観主義論理では一般には成立していない排中律を自動的に容認してしまうので、よいこともあるが、納得するということからは少し問題である。だいぶ前のことだが、実験科学者でものを正面から考える友人が青くなって部屋に入ってきた。$(A \to B) \vee (B \to A)$ が正しいというのは変だというのだ。真理表を書けば成立してしまうのだが、自分のしている実験の事象を考えると間違いに決まっているというのだ。そこで直観主義論理の話をして、開集合からなる直観主義論理のモデルをつかって成り立たないこともあ

るという話をした。A に xy-平面の $\{(x,y):x>0\}$ を対応させ、B に xy-平面の $\{(x,y):y>0\}$ を対応させせると $A\to B$ には $\{(x,y):x<0\vee y>0\}$、$B\to A$ には $\{(x,y):x>0\vee y<0\}$ に対応するので、$(A\to B)\vee(B\to A)$ には xy-平面から原点 $(0,0)$ を除いた開集合が対応し、全 xy-平面とはならない、つまり成立していない、ということを話した。それで、何とか自分の直感が変なわけではないと安心してもらった。

否定の注意というのは、このような直観主義の落とし穴も含め、論理的に同値であっても、分かり難い命題を分かり易い形に変形しておくとよいということである。それは 4 章の冠頭標準形とも関係している。本に書いてある例で、空間 X が連結であるということの定義が

$$\neg\exists O\exists P(O,P \text{ が } X \text{ の空でない開集合で } O\cup P=X \text{ かつ } O\cap P=\emptyset)$$

である場合、

$$\forall O\forall P((O,P \text{ が } X \text{ の開集合で } O\cup P=X \text{ かつ } O\cap P=\emptyset)\to(O=\emptyset\vee P=\emptyset))$$

あるいは

$$\forall O((O \text{ と } X\setminus O \text{ が } X \text{ の開集合 })\to(O=\emptyset\vee O=X))$$

のように書き換えておくと考えやすい。ついでだが、後者から前者は直観主義論理でも導かれるが、前者から後者は導けない。

数学の問題を考えるときは、古典論理のなかで扱われるので、その概念の否定とともに考えることにより、排中律あるいは二重否定除去をふまえた感覚が身につくだろうというのがそこに書いたことである。私は直観主義論理は知りません、わかりませんといい、いつも古典論理のなかでものを考えると宣言する人には、はじめに書いたように否定概念というものは相対的なものとしてしか存在しないので、私の書いたこととは無縁の人なのである。もっとも、そんな人がいるとは私は思っていない。というのも、「彼は賢くないというわけではない」というのは「彼は賢い」というとは違い、「彼はまるっきりのバカではない」という意味に近い表現だと受けとられるのが普通だと思うからである。